

## SEBUAH GENERALISASI GRAF TAK BERARAH PADA HIMPUNAN BAGIAN TERBATAS DARI BILANGAN ASLI

ASRIADI<sup>a\*</sup>, BERTU Rianto TAKAENDENGAN<sup>b</sup>, NISKY IMANSYAH YAHYA<sup>c</sup>

<sup>a</sup> Universitas Negeri Gorontalo,

<sup>b</sup> Universitas Negeri Gorontalo,

<sup>c</sup> Universitas Negeri Gorontalo.

*email : asriadi@ung.ac.id, bertu@ung.ac.id, nisky@ung.ac.id*

Diterima    Direvisi    Dipublikasikan

**Abstrak.** Tulisan ini mengkaji tentang sebuah generalisasi graf tak berarah dengan fokus pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli. Generalisasi ini adalah sebuah pendekatan rigor untuk teori graf. Beberapa sifat fundamental dari generalisasi graf tak berarah akan menjadi fokus dalam tulisan ini.

*Kata Kunci:* Bilangan Asli, Graf.

### 1. Pendahuluan

Berbagai gagasan tentang teori graf dalam sistem himpunan tertentu telah lama dikaji oleh banyak matematikawan. Beberapa gagasan tersebut diantaranya dalam [1],[4] yang membahas teori graf dalam struktur semigrup, dan dalam [2],[3],[5],[6],[7],[8] yang membahas teori graf dalam struktur bilangan asli.

Dalam struktur bilangan asli pada [4], Chakrabarty telah mencetuskan bahwa sebuah graf tak berarah, dinotasikan  $G_{m,n}$ , adalah graf dengan himpunan verteks  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dimana  $x, y \in V$  dikatakan terhubung jika dan hanya jika  $x \neq y$  dan  $x + y$  tidak habis dibagi  $m$  untuk  $m \in \mathbb{N}$  dan  $m > 1$ . Dari sudut pandang lain, Costain pada [2] mengenalkan konsep graf aditif, dinotasikan sebagai  $G(n, S)$ , yaitu graf dengan verteks  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dengan  $a, b \in V$  disebut terhubung jika dan hanya jika  $a + b \in S \subset \mathbb{N}$ .

Dengan berlatarbelakang pada konsep yang telah digagas oleh Chakrabarty dan Costain tersebut, tulisan ini akan mengenalkan sekaligus menunjukkan beberapa sifat fundamental generalisasi graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

\*penulis korespondensi

## 2. Metode penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur yaitu dengan mengumpulkan bahan penelitian melalui artikel atau literatur-literatur lain yang berkaitan dan relevan dengan graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

## 3. Pembahasan

Sebelum masuk dalam pengkajian generalisasi graf tak berarah, berikut adalah beberapa definisi graf tak berarah yang telah diberikan pada penelitian sebelumnya.

**Definisi 3.1.** [4] Misalkan  $m, n \in \mathbb{N}$  dengan  $m > 1$ . Sebuah graf tak berarah  $G_{m,n}$  adalah sebuah graf dengan himpunan verteks  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dan himpunan sisi  $E = \{(x, y) \in V^2 : x \neq y, \frac{x+y}{m} \notin \mathbb{N}\}$ .

**Definisi 3.2.** [2] Diberikan sebuah bilangan  $n \in \mathbb{N}$  dan sebuah himpunan berhingga  $S \subset \mathbb{N}$ . Sebuah graf aditif, dinotasikan sebagai  $G(n, S)$ , adalah sebuah graf dengan verteks  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dengan  $a, b \in V$  disebut terhubung jika dan hanya jika  $a \neq b$  dan  $a + b \in S$ .

Berikut adalah definisi dari sebuah generalisasi graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

**Definisi 3.3.** Diberikan himpunan berhingga tak kosong  $M \subset \mathbb{N}$  dan sebuah fungsi  $e : M^2 \rightarrow \{0, 1\}$  dengan  $e(m, n) = e(n, m)$  dan  $e(m, m) = 0$ . Himpunan

$$G(e, M) := (M \cup \{(m, n) \in M^2 : m \neq n, e(m, n) = 1\}) \quad (3.1)$$

disebut sebuah **granum** yang berasosiasi dengan himpunan  $M$  dan konektor  $e$ .

Himpunan **titik** dan himpunan **sisi** dari sebuah granum  $G(e, M)$  berturut-turut dinyatakan sebagai

$$V[G(e, M)] := M \quad (3.2)$$

$$E[G(e, M)] := \{(m, n) \in M^2 : m \neq n, e(m, n) = 1\}. \quad (3.3)$$

Dua buah titik  $u, v \in V[G(e, M)]$  disebut **terhubung** jika  $e(u, v) = 1$  dan disebut **tak terhubung** jika  $e(u, v) = 0$ . Selanjutnya, dua buah sisi  $(p, q), (r, s) \in E[G(e, M)]$  disebut **bertetangga** jika  $(p - r)(p - s)(q - r)(q - s) = 0$  dan disebut **tak bertetangga** jika  $(p - r)(p - s)(q - r)(q - s) \neq 0$ .

Graf tak berarah  $G_{m,n}$  pada Definisi 3.1 adalah sebuah granum yang berasosiasi dengan himpunan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dan konektor

$$g(i, j) = \left( \operatorname{sgn} |i - j| \right) \left( \operatorname{sgn} \left( \frac{i + j}{m} - \left\lfloor \frac{i + j}{m} \right\rfloor \right) \right). \quad (3.4)$$

untuk setiap  $i, j \in V$ . Sedangkan pada definisi 3.2, graf aditif  $G(n, S)$  adalah sebuah granum yang berasosiasi dengan himpunan  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  dan konektor

$$h(i, j) = \left( \operatorname{sgn} |i - j| \right) \left( 1 - \operatorname{sgn} \left( \prod_{k \in S} |i + j - k| \right) \right). \quad (3.5)$$

**Definisi 3.4.** Diberikan sebuah granum  $G(e, M)$ . **Derajat** sebuah titik  $i \in V[G(e, M)]$  dinyatakan sebagai

$$\rho(i) := \sum_{j \in M} e(i, j). \quad (3.6)$$

**Modulus titik** dari granum  $G(e, M)$  dinyatakan sebagai

$$\|V[G(e, M)]\| := |M|. \quad (3.7)$$

Sedangkan **modulus sisi** dari granum  $G(e, M)$  dinyatakan sebagai

$$\|E[G(e, M)]\| := \frac{1}{2} \sum_{i, j \in M} e(i, j). \quad (3.8)$$

**Derajat minimum** dan **derajat maksimum** dari dari sebuah granum  $G(e, M)$  berturut-turut dituliskan

$$\lambda(i) := \min\{\rho(i) : i \in M\} \quad (3.9)$$

$$\Lambda(i) := \max\{\rho(i) : i \in M\}. \quad (3.10)$$

**Definisi 3.5.** Sebuah granum  $H(f, N)$  disebut sebuah **subgranum**  $G(e, M)$ , ditulis  $H(f, N) \subseteq G(e, M)$ , jika dan hanya jika  $N \subseteq M$  dan  $V[H(f, N)] \subseteq V[G(e, M)]$ .

**Definisi 3.6.** Dua buah granum  $H(f, N)$  dan  $G(e, M)$  disebut **isomorfik**, ditulis  $H(f, N) \simeq G(e, M)$ , jika dan hanya jika terdapat bijeksi  $\alpha : H \rightarrow G$  dimana untuk setiap  $(i, j) \in E[H(f, N)]$  berlaku  $(\alpha(i), \alpha(j)) \in E[G(e, M)]$ . Bijeksi  $\alpha$  disebut sebuah **isomorfisma** antara granum  $H(f, N)$  dan  $G(e, M)$ .

Berikut adalah penamaan khusus bagi sebuah granum yang isomorfik dengan granum tertentu.

**Definisi 3.7.** Diberikan sebuah bilangan  $n \in \mathbb{N}$ . Sebuah granum  $G(e, M)$  disebut **granum lengkap** dengan  $n$  titik jika dan hanya jika granum  $G(e, M)$  isomorfik dengan granum  $K(f, [n])$  dimana  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  dan

$$f(i, j) = \text{sgn } |i - j| \quad (3.11)$$

untuk setiap  $i, j \in [n]$ .

**Contoh 3.8.** Granum  $P(e, M)$ , dengan  $M = \{2, 5, 7\}$  dan  $e(2, 5) = e(2, 7) = e(5, 7) = 1$ , adalah sebuah granum lengkap dengan 3 titik.

**Definisi 3.9.** Diberikan sebuah bilangan  $n \in \mathbb{N}$ . Sebuah granum  $G(e, M)$  disebut **granum lintasan** dengan  $n$  titik jika dan hanya jika granum  $G(e, M)$  isomorfik dengan granum  $L(f, [n])$  dimana

$$f(i, j) = 1 - \text{sgn } ||i - j| - 1| \quad (3.12)$$

untuk setiap  $i, j \in [n]$ .

**Contoh 3.10.** Granum  $Q(e, M)$ , dengan  $M = \{1, 3, 4, 8\}$ ,  $e(1, 3) = e(1, 8) = e(4, 8) = 0$ , dan  $e(1, 4) = e(3, 4) = e(3, 8) = 1$ , adalah sebuah granum lintasan dengan 4 titik.

**Definisi 3.11.** Diberikan sebuah bilangan  $n \in \mathbb{N}$ . Sebuah granum  $G(e, M)$  disebut **granum sikel** dengan  $n$  titik jika dan hanya jika granum  $G(e, M)$  isomorfik dengan granum  $S(f, [n])$  dimana

$$f(i, j) = 1 - \text{sgn}(|i - j| - 1)(|i - j| - (n - 1)) \quad (3.13)$$

untuk setiap  $i, j \in [n]$ .

**Contoh 3.12.** Granum  $R(e, M)$ , dengan  $M = \{3, 5, 7, 9\}$ ,  $e(3, 7) = e(5, 9) = 0$ , dan  $e(3, 5) = e(5, 7) = e(7, 9) = e(3, 9) = 1$ , adalah sebuah granum sikel dengan 4 titik.

Teorema berikut analog dengan Lemma Jabat Tangan pada graf biasa.

**Teorema 3.13.** Untuk granum  $G(e, M)$  berlaku  $\|E[G(e, M)]\| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  dan

$$\sum_{i \in M} \rho(i) = 2 \cdot \|E[G(e, M)]\|. \quad (3.14)$$

**Bukti.** Dari Definisi 3.4 diperoleh

$$\|E[G(e, M)]\| = \frac{1}{2} \sum_{i, j \in M} e(i, j) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{i, j \in M, i < j} e(i, j) = \sum_{i, j \in M, i < j} e(i, j).$$

Karena  $e(i, j) \in \{0, 1\}$  maka

$$\|E[G(e, M)]\| = \sum_{i, j \in M, i < j} e(i, j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Selanjutnya, masih berdasarkan Definisi 3.4, diperoleh juga bahwa

$$\sum_{i \in M} \rho(i) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} e(i, j) = \sum_{i, j \in M} e(i, j) = 2 \cdot \|E[G(e, M)]\|.$$

Bukti lengkap. □

**Akibat 3.14.** Diberikan sebuah granum  $G(e, M)$  dan fungsi  $O : V[G(e, M)] \rightarrow \{0, 1\}$  dengan  $O(i) := \rho(i) - 2 \cdot \lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor$  untuk  $i \in V[G(e, M)]$  maka  $\sum_{i \in M} O(i) \equiv 0 \pmod{2}$ .

**Bukti.** Dengan memanfaatkan Teorema 3.13 didapatkan

$$\sum_{i \in M} O(i) = \sum_{i \in M} (\rho(i) - 2 \cdot \lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor) = 2 \cdot \left( \|E[G(e, M)]\| - \sum_{i \in M} (\lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor) \right) \equiv 0 \pmod{2}$$

yang bersesuaian dengan yang ingin ditunjukkan. □

Ciri khas dari sebuah granum bergantung pada bentuk konektornya. Proposisi berikut menyediakan cara untuk menentukan konektor untuk sebarang granum.

**Proposisi 3.15.** Diberikan sebuah granum  $G(e, M)$ . Jika

$$J := \{m + n : m, n \in M, e(m, n) = 1\}$$

dan

$$S := \{|m - n| : m, n \in M, e(m, n) = 1\}$$

maka konektor  $e$  memiliki bentuk

$$e(i, j) = \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} |(i + j) - p|\right) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||i - j| - q|\right) \quad (3.15)$$

untuk setiap  $i, j \in M$ .

**Bukti.** Ambil sebarang  $u, v \in M$ . Pandang fungsi  $e : M^2 \rightarrow \mathbb{N}$  dengan

$$f(u, v) := \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} |(u + v) - p|\right) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||u - v| - q|\right). \quad (3.16)$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk semua  $u, v \in M$  berlaku  $f(u, v) = e(u, v)$ . Dari (3.16) diperoleh bahwa  $f(u, v) \in \{0, 1\}$ ,  $f(u, v) = f(v, u)$ , dan  $f(u, u) = 0$ . Jadi untuk  $u = v$  dan  $f(u, v) = 0 = e(u, v)$ . Untuk  $u \neq v$  akan dibagi menjadi dua kasus.

(Kasus 1) Jika  $e(u, v) = 0$  maka untuk sebarang  $q \in S$  berlaku  $|u - v| - q \neq 0$ . Sehingga

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} |(u + v) - p|\right) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||u - v| - q|\right) \\ &= (1 - 1) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||u - v| - q|\right) \\ &= 0 \\ &= e(u, v). \end{aligned}$$

(Kasus 2) Jika  $e(u, v) = 1$  maka terdapat  $p_{uv} \in J$  dan  $q_{uv} \in S$  dengan  $(u + v) - p_{uv} = 0$  dan  $|u - v| - q_{uv} = 0$ . Sehingga

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} |(u + v) - p|\right) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||u - v| - q|\right) \\ &= (1 - 0) (1 - 0) \\ &= 1 \\ &= e(u, v). \end{aligned}$$

Jadi, untuk semua  $u, v \in M$  memenuhi  $f(u, v) = e(u, v)$ . Dengan kata lain

$$e(i, j) = \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} |(i + j) - p|\right) \left(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} ||i - j| - q|\right)$$

untuk setiap  $i, j \in M$ . □

#### 4. Kesimpulan

Konsep teori granum sebagai generalisasi konsep graf tak berarah pada struktur bilangan telah dikenalkan dalam tulisan ini. Beberapa sifat fundamental juga telah diungkapkan. Diantaranya bahwa telah tersedia sebuah cara untuk membangun fungsi konektor dari sebuah granum.

### Daftar Pustaka

- [1] Bozak, J., 1964, The graphs of semigroups, *Theory of Graphs and Application*, Academic Press, New York, 119 – 125.
- [2] Costain, G., 2008, *On the additive graph generated by a subset of the natural numbers*, *Disertasi*, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.
- [3] Chakrabarty, I., Ghosh, S., Sen, M.K., 2009, Undirected power graphs of semigroups, *Semigroup Forum*, 410 – 426.
- [4] Chakrabarty, I., 2015, An undirected graph on a finite subset of natural numbers, *Indian Journal Discrete Math*, **Vol. 1, No. 2** : 128 – 138.
- [5] Chakrabarty, I., 2019, On some structural properties of  $G_{m,n}$  graphs, *Mapana Journal of Sciences*, **Vol. 18, No. 3** : 45 – 52.
- [6] Kauser, S.A., Kahn, A., 2019, Clique domination in an undirected graph  $G_{m,n}$ , *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, **Vol. 10, No. 9** : 1585 – 1588.
- [7] Kauser, S.A., Parvathi, M.S., 2019, Domatic number of an undirected graph  $G_{m,n}$ , *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, **Vol. 9, No. 10** : 7859 – 7864.
- [8] Kalita, P., 2020, Some aspects of an undirected graph on a finite subset of natural numbers, *International Journal of Advanced Science and Technology*, **Vol. 29, No. 8** : 6189 – 6193.